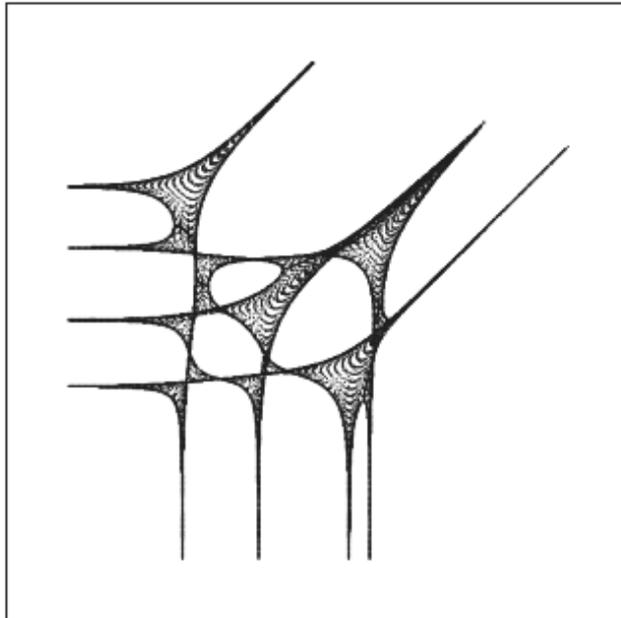


UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

Mickaël NICOTERA

Amibes et Géométrie tropicale

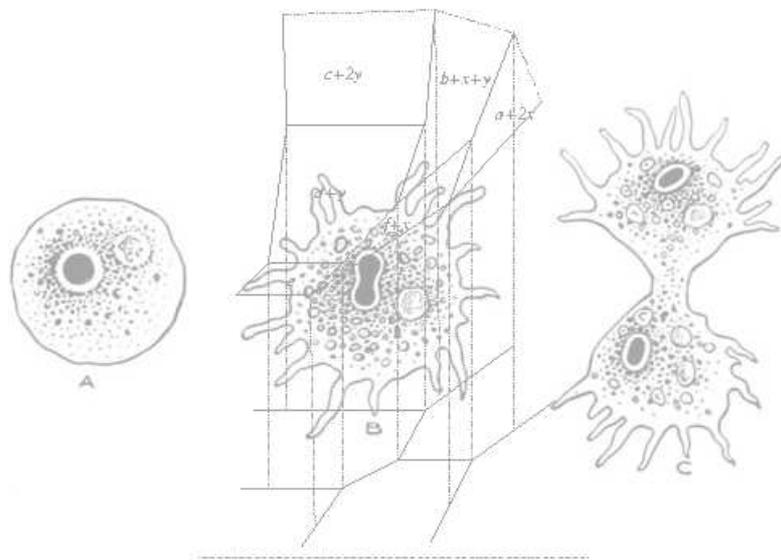
Encadré par Alain Yger



Amibes & Géométrie Tropicale

Mickaël Nicotera

Mémoire Octobre 2007



Introduction

Les amibes (du grec amoibê transformation) sont en biologie des organismes cellulaires microscopiques capables de se déplacer par des déformations de leur cytosquelettes.

En mathématiques, on désigne par ce nom des objets représentés dans \mathbb{R}^2 par une région non bornée qui ressemble au dessin d'une amibe biologique.

On retrouve les amibes mathématiques dans un croisement de nombreux domaines mathématiques : la géométrie algébrique, la topologie, l'analyse complexe...

Elles ont permis l'obtention de résultats impressionnants depuis qu'elles ont été introduites en 1994.

Le texte suivant présente d'abord la définition d'une amibe mathématique et ses propriétés. S'en suivent des résultats intéressants sur le complémentaire d'une amibe et une application aux discriminants. La dernière partie de ce dossier est consacrée à une introduction à la géométrie tropicale et à la comparaison de ses propriétés avec celles de la géométrie classique. La géométrie tropicale a été élaborée car elle présente l'intérêt d'avoir certains théorèmes d'intersection simplifiés par rapport à la géométrie classique grâce à une plus grande facilité de manipulation, les problèmes devenant la plupart du temps simplement combinatoires. Ces versions tropicales pourraient alors induire les preuves des versions classiques. La géométrie tropicale a également de nombreuses autres applications dans divers domaines des mathématiques dont des développements récents en géométrie algébrique énumérative amorcés par Grigory Mikhalkin.



Fig. 1. Amibes Biologiques

Table des matières

1. Amibes de variétés algébriques	4
1.1. Définitions et premières propriétés	4
1.2. Etude du complémentaire d'une amibe	11
1.3. Amibes et polytopes de Newton	13
1.4. Ordre des composantes du complémentaire	16
1.5. Amibe d'un discriminant	18
2. Géométrie Tropicale	19
2.1. Arithmétique tropicale	19
2.2. Polynômes tropicaux	20
2.3. Variétés tropicales	21
2.4. Courbes tropicales et polytopes de Newton	23
2.5. Version tropicale des théorèmes classiques	25
3. Conclusion	30

1. Amibes de variétés algébriques

1.1. Définitions et premières propriétés

La première partie de l'article définit les amibes et coamibes et donne quelques exemples.

Définition 1. Soit n un entier strictement positif, et $V \subset (\mathbb{C}^*)^n$ une variété algébrique. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \mathbf{Log} : (\mathbb{C}^*)^n &\rightarrow (\mathbb{R})^n, \\ (z_1, \dots, z_n) &\rightarrow (\log|z_1|, \dots, \log|z_n|) \end{aligned}$$

L'*amibe*¹ $A(V)$ de V est l'image de V par l'application \mathbf{Log} .

Rappel 1. Logarithme complexe : pour $z_j \in \mathbb{C}^*$, $\log z_j = \log|z_j| + i \cdot \arg(z_j)$.

Définition 2. Soit n un entier strictement positif, et $V \subset (\mathbb{C}^*)^n$ une variété algébrique. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \mathbf{Arg} : (\mathbb{C}^*)^n &\rightarrow [0, 2\pi[^n, \\ (z_1, \dots, z_n) &\rightarrow (\arg(z_1), \dots, \arg(z_n)) \end{aligned}$$

La *coamibe* $C(V)$ de V est l'image de V par l'application \mathbf{Arg} .

Proposition 1. La première propriété d'une amibe est qu'elle est fermée.

On a ensuite cette proposition :

Proposition 2. Le complémentaire de $A(V)$ est non vide.

La plupart des propriétés que nous mentionnerons concerne des *amibes d'hypersurfaces* qui nous mèneront à considérer dans toute la suite, sauf mention spéciale, un polynôme de Laurent

$$f = \sum_{k \in I} b_k z^k$$

où $z = (z_1, \dots, z_n)$ et I , sous-ensemble de \mathbb{Z}^n .
 z^k signifie $z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$.

Voyons également la définition du support d'un polynôme qui nous servira par la suite.

Définition 3. Le **support d'un polynôme**, noté $\text{supp}(f)$, est défini comme étant l'ensemble des exposants des monômes dont les coefficients sont non nuls : si $f = \sum_{a \in E \subset \mathbb{Z}^n} c_a Z^a$ où

$Z = (z_1, \dots, z_n)$ alors :

$$\text{supp}(f) = \{a ; c_a \neq 0\}.$$

Soit maintenant Z_f l'ensemble des zéros de f dans $(\mathbb{C}^*)^n$. Nous étudierons son amibe $A(Z_f)$.

¹Ce nom a été introduit pour la première fois par Gelfand, Kapranov et Zelevinsky dans [GKZ].

Exemple 1. *Commençons par un cas élémentaire, celui de l'amibe d'un polynôme à une seule variable complexe.*

Prenons par exemple le polynôme $p(z) = (z + 1)(z + 2)(z + 3)$. Il possède trois zéros de module 1, 2 et 3. L'amibe est donc représenté par trois points : 0, log 2 et log 3. Les composantes du complémentaire de l'amibe sont alors des intervalles.

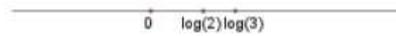


Fig. 2. Amibe de $V = \{(z + 1)(z + 2)(z + 3) = 0\}$

Si l'on regarde les images réciproques de ces intervalles par $z \mapsto \log z$, les composantes du complémentaire de l'amibe sont alors les couronnes délimitées par les cercles de rayons le log du module des racines représentant l'amibe.

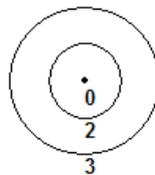


Fig. 3. Images réciproques par $z \mapsto \log z$ des composantes du complémentaire de $A(V)$

Exemple 2. *Voici maintenant un exemple d'amibe des zéros d'un polynôme à deux variables :*
 $V = \{z_1 + z_2 - 1 = 0\}$

Par les inégalités triangulaires, il vient :

$$|z_1 + z_2| = 1 \geq |z_1| - |z_2|$$

$$|z_1 + z_2| = 1 \geq |z_2| - |z_1|$$

$$|z_1 + z_2| = 1 \leq |z_1| + |z_2|$$

En posant $|z_1| = r_1$ et $|z_2| = r_2$, on obtient trois inéquations qui permettent d'évaluer l'ensemble $\{(|z_1|, |z_2|) / z_1 + z_2 - 1 = 0\}$:

$$\begin{cases} r_2 \geq 1 - r_1 \\ r_2 \leq r_1 + 1 \\ r_2 \geq r_1 - 1 \end{cases}$$

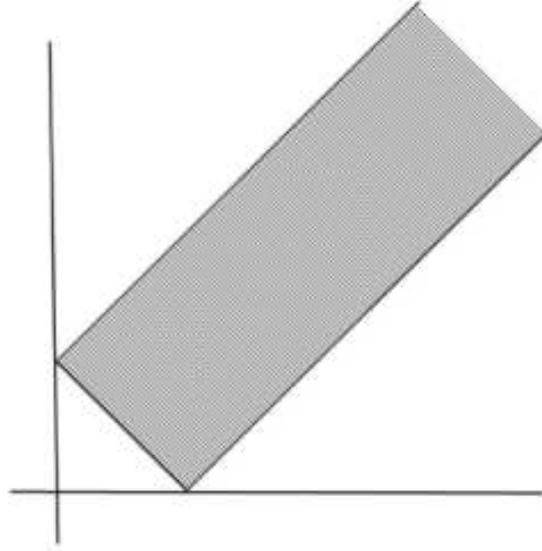


Fig. 4. $|z_2| \leq |z_1| + 1$, $|z_1| \leq |z_2| + 1$ et $1 \leq |z_1| + |z_2|$

En considérant chaque frontière de la zone hachurée, on délimite la zone $\{(\log|z_1|, \log|z_2|) / z_1 + z_2 - 1 = 0\}$ en composant par l'application bijective Log :
 → le premier côté en gras correspond aux couples (r_1, r_2) tels que $r_1 + r_2 = 1$ (portion de la droite d'équation $y = 1 - x$) :

$$\begin{aligned} r_2 &= 1 - r_1 \\ \Rightarrow \log r_2 &= \log(1 - r_1) \\ \Rightarrow x_2 &= \log(1 - e^{x_1}) \end{aligned}$$

en posant $x_1 = \log r_1$ et $x_2 = \log r_2$).

L'image du segment par l'application Log devient donc la courbe d'équation $y = \log(1 - e^x)$ dont voici le tracé avec Maple :

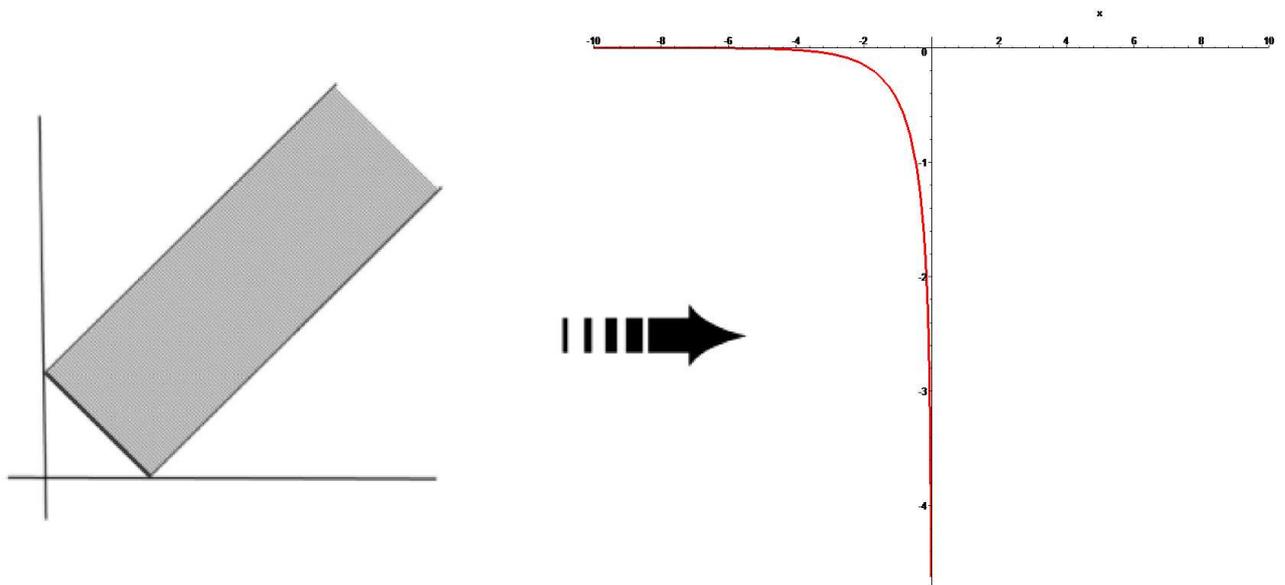


Fig. 5. $|z_1| + |z_2| = 1$

→ le second côté en gras correspond aux couples (r_1, r_2) tels que $r_2 - r_1 = 1$:

$$\begin{aligned} r_2 &= 1 + r_1 \\ \Rightarrow \log r_2 &= \log(1 + r_1) \\ \Rightarrow x_2 &= \log(1 + e^{x_1}) \end{aligned}$$

en posant $x_1 = \log r_1$ et $x_2 = \log r_2$.

L'image de la demi-droite par l'application Log devient donc la courbe d'équation $y = \log(1 + e^x)$ dont voici le tracé avec Maple :

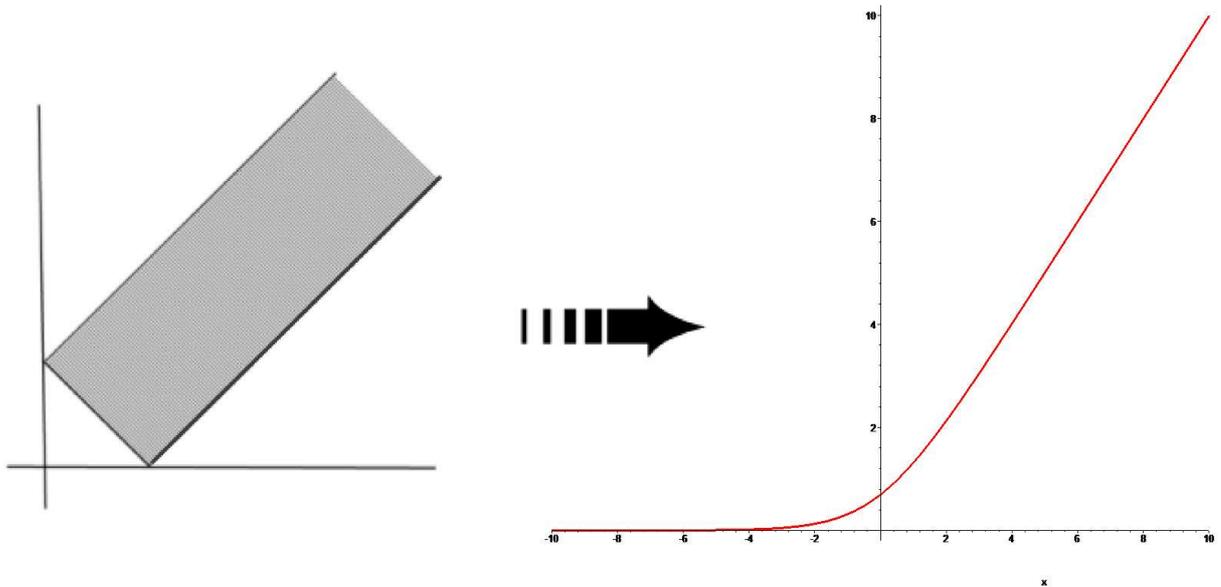


Fig. 6. $|z_1| = |z_2| - 1$

→ le dernier côté en gras correspond aux couples (r_1, r_2) tels que $r_1 - r_2 = 1$:

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 - 1 \\ \Rightarrow \log r_2 &= \log(r_1 - 1) \\ \Rightarrow x_2 &= \log(e^{x_1} - 1) \end{aligned}$$

en posant $x_1 = \log r_1$ et $x_2 = \log r_2$.

L'image de la demi-droite par l'application Log devient donc la courbe d'équation $y = \log(e^x - 1)$ dont voici le tracé avec Maple :

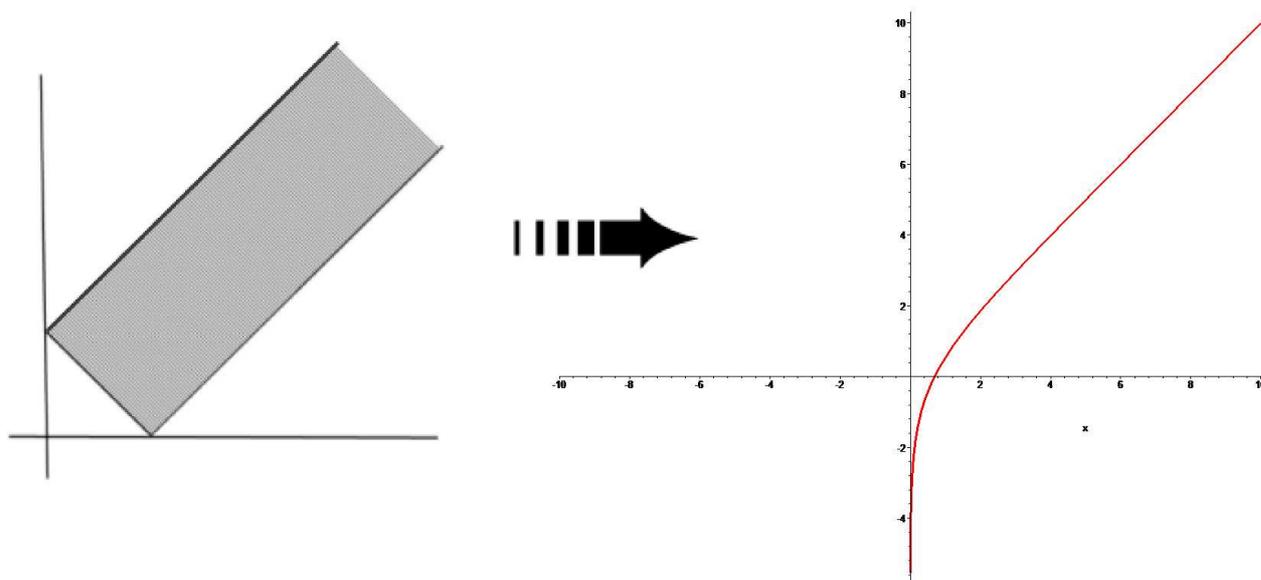
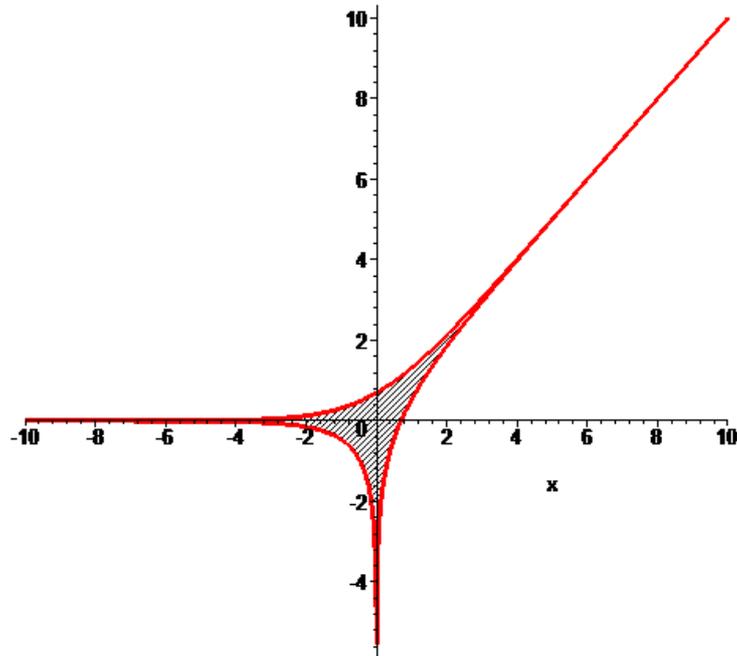


Fig. 7. $|z_1| = |z_2| + 1$

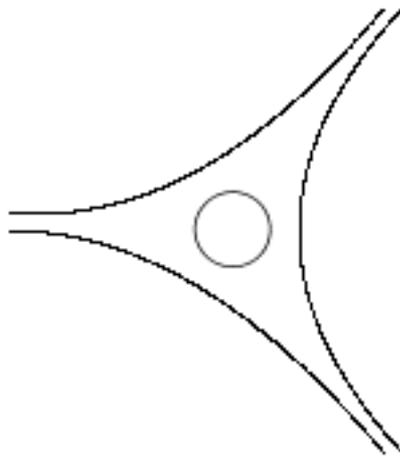
Au final, l'amibe obtenue est la portion intérieure du plan délimitée par les 3 courbes.

Fig. 8. Amibe de V

Définition 4. Une amibe est dite solide si son complémentaire n'admet aucune composante connexe bornée.

Remarque 1. On peut donc voir une amibe solide comme une amibe "sans trous".

Exemple 3. Pour $V = \{z_1^{-1}z_2^{-1} + z_1 + z_2 + 1 = 0\}$

Fig. 9. Amibe de V qui présente un "trou"

1.2. Etude du complémentaire d'une amibe

Définition 5. *Un sous-ensemble E de $(\mathbb{C} \setminus \{a_1\}) \times \dots \times (\mathbb{C} \setminus \{a_n\})$ est appelé logarithmiquement convexe, ou log convexe, si $E = \text{Log}_a^{-1}(E')$ où E' est convexe dans \mathbb{R}^n et où*

$$\text{Log}_a(z) := (\log|z_1 - a_1|, \dots, \log|z_n - a_n|)$$

c'est à dire si $\text{Log}(E)$ est convexe dans \mathbb{R}^n .

Maintenant, venons-en à la principale caractérisation des domaines de convergence pour les séries de Laurent qui nous permettra d'établir la propriété de convexité des composantes du complémentaire d'une amibe :

Théorème 1. *Le domaine de convergence pour les séries de Laurent est logarithmiquement convexe.*

Preuve. Ce que l'on démontre ici est que les composantes connexes du domaine de convergence d'une série de Laurent

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} (z - a)^{\alpha}$$

autour du point a dans \mathbb{C}^n (ces composantes connexes étant considérées dans le tore $(\mathbb{C} \setminus \{a_1\}) \times \dots \times (\mathbb{C} \setminus \{a_n\})$), sont logarithmiquement convexes.

Plus précisément, si on suppose qu'une série de Laurent

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_{\alpha} z^{\alpha}$$

converge en un point z_0 de $(\mathbb{C}^*)^n$; alors on montre que le plus grand ouvert connexe E de $(\mathbb{C}^*)^n$ contenant z_0 et sur lequel cette série de Laurent converge est logarithmiquement convexe.

En effet, si on prend deux points z', z'' dans E et que l'on prend leurs images $\xi' = \text{Log } z'$, $\xi'' = \text{Log } z''$, alors la série de Laurent converge en tous les points z de $(\mathbb{C}^*)^n$ appartenant à l'image réciproque $(\text{Log}^{-1})([\xi', \xi''])$ du segment $[\xi', \xi'']$ de \mathbb{R}^n par l'application Log . Cela s'obtient avec l'inégalité de Hölder :

Soit $t \in [0, 1]$.

$\sum_{\alpha} |c_{\alpha}| e^{\langle \xi', \alpha \rangle}$ converge vers M_1 et $\sum_{\alpha} |c_{\alpha}| e^{\langle \xi'', \alpha \rangle}$ converge vers M_2 .

On veut montrer que $S = \sum_{\alpha} |c_{\alpha}| e^{\langle t\xi' + (1-t)\xi'', \alpha \rangle}$ converge.

Comme $t + (1 - t) = 1$, on prend $1/p = t$ et $1/q = 1 - t$ et on utilise l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^{1/p} e^{1/p \langle \xi', \alpha \rangle} |c_{\alpha}|^{1/q} e^{1/q \langle \xi'', \alpha \rangle} \\ &\leq \left(\sum_{\alpha} \left(|c_{\alpha}|^{1/p} e^{1/p \langle \xi', \alpha \rangle} \right)^p \right)^{1/p} \left(\sum_{\alpha} \left(|c_{\alpha}|^{1/q} e^{1/q \langle \xi'', \alpha \rangle} \right)^q \right)^{1/q} = M_1^{1/p} M_2^{1/q} \end{aligned}$$

et alors S converge.

□

Théorème 2. Soit $f(x)$ un polynôme de Laurent. Toute composante connexe E de $\mathcal{CA}(Z_f)$ est convexe et est l'image par Log d'un ouvert connexe maximal de $(\mathbb{C}^*)^n$ où converge un certain développement en série de Laurent de $1/f(x)$.

Preuve. Soient C une composante de $\mathcal{CA}(Z_f)$ et $\xi_0 = \text{Log } z_0$ un point de C . Alors f ne s'annule pas sur $\text{Log}^{-1}(C)$ et donc $1/f$ est holomorphe sur $\text{Log}^{-1}(C)$ et alors admet un développement en série de Laurent $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha$ convergeant au voisinage de z_0 ; ce développement reste valable dans la composante connexe E contenant z_0 du domaine de convergence de la série de Laurent $\sum_{\alpha} c_\alpha z^\alpha$ définissant f au voisinage de z_0 . Or cette composante E est logarithmiquement convexe (d'après le théorème précédent) et son image par l'application Log est une partie connexe de \mathbb{R}^n coïncidant nécessairement avec C : en effet $\text{Log } E$ (qui est connexe) est contenue dans C et l'on voit que cette inclusion ne peut être stricte car tout point ζ appartenant à la frontière de $\text{Log } E$ ne peut être qu'à la frontière de C puisque $1/f$ est holomorphe au voisinage de tout point de $\text{Log}^{-1}(\zeta)$. Donc $\text{Log } E = C$ avec E logarithmiquement convexe, c'est à dire C est convexe

Enfin, puisque toute série de Laurent converge sur un connexe, on doit avoir des séries différentes sur les différentes composantes.

□

A chaque développement en série de Laurent de $1/f$ correspond donc une composante connexe du complémentaire de l'amibe.

Exemple 4. Soit le polynôme à une variable complexe $f(z) = z^2 + z - 2 = (z - 1)(z + 2)$. Intéressons-nous au développement en série de Laurent de $1/f(z)$:

$$\frac{1}{f(z)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z^2 + z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z^2 + z}{2} \right)^j$$

pour $\left| \frac{z^2 + z}{2} \right| < 1$ (la série converge donc vers $1/f(z)$ pour $|z| < 1$).

On a un autre développement correspondant à un autre domaine de convergence :

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 - \frac{2-z}{z^2}} = \frac{1}{z^2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z^2} - \frac{1}{z} \right)^j$$

qui converge pour $|z| > 2$.

Y-a-t'il un autre développement en série de Laurent de $1/f(z)$? Essayons en factorisant maintenant par le dernier monôme $1/z$:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{2-z^2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z} - z \right)^j$$

$1/f(z)$ a deux pôles : $z = 1$ et $z = 2$.

Alors $1/f(z)$ est holomorphe dans le disque $|z| < 1$ et dans la couronne non bornée $|z| > 2$.

$1/f(z)$ est également holomorphe dans la couronne $1 < |z| < 2$. Donc $1/f(z)$ peut être développé en série de Laurent dans cette couronne :

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k$$

où $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{z^{-k-1}}{f(z)} dz$ et $1 < r < 2$.

On a donc trois développements en série de Laurent.

Si on regarde maintenant l'amibe associée à f , on trouve 2 points : 0 et $\log 2$. Le complémentaire a donc 3 composantes qui sont 3 intervalles et qui correspondent chacun à un développement en série de Laurent de $1/f$ différent trouvé juste avant. Si l'on se place dans le plan complexe, on retrouve les couronnes de convergence.

De manière plus générale, on a que si $f(z)$ est un polynôme en une variable, alors le nombre de développements convergents en série de Laurent de $1/f(z)$ est à égal à 1 plus le nombre maximal de racines non nulles de f avec des valeurs absolues distinctes.

On peut considérer ensuite des polynômes à plusieurs variables, ce que nous ferons dans l'exemple 7 avec les polytopes de Newton.

En fait, on peut associer des développements de $1/f$ en série de Laurent dans des composantes connexes du complémentaire de l'amibe à des sommets du polytope de Newton de f . Voyons cela en détail.

1.3. Amibes et polytopes de Newton

Définition 6. Un polytope de Newton Δ est défini comme étant l'enveloppe convexe d'un ensemble E de sommets inclus dans \mathbb{Z}^n , où l'enveloppe convexe est le plus petit ensemble convexe contenant E .

Dans notre cas, les polytopes de Newton notés N_p seront les enveloppes convexes des supports des polynômes.

Exemple 5. Prenons p comme le polynôme à deux variables complexes : $p(z, w) = 1 + z + 50zw + 500z^2w + z^3w + z^2w^2$.

$\text{supp}(f) = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 2)\}$.

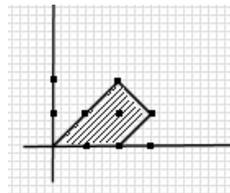


Fig. 10. N_p , polytope de Newton de p

Remarque 2. Si le polynôme a une seule variable, le polytope de Newton est juste un segment.

Remarque 3. Si on trace l'amibe associée au polynôme p défini dans l'exemple, On remarque que les directions normales des faces de N_p sont les directions asymptotiques des tentacules de A_p .

Le polytope de Newton représente la géométrie de l'équation et est profondément lié à la courbe tropicale du polynôme et de son amibe.

Certaines composantes connexes du complémentaire de l'amibe contiennent en fait les cônes duals des sommets entiers du polytope de Newton associé.

Rappelons tout d'abord la notion de cône dual :

Définition 7. Si C est un cône de \mathbb{R}^n alors son cône polaire C° est donné par :

$$C^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n; \langle x, y \rangle \leq 0 \quad \forall x \in C\}$$

Définition 8. On définit alors le cône dual C^* comme $C^* = -C^\circ$.

On subodore alors facilement ce que sont les cônes duals des sommets entiers d'un polytope de Newton :

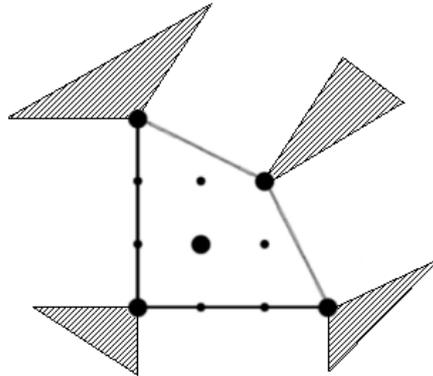


Fig. 11. Cônes duals

Voyons-le sur un exemple précis :

Exemple 6. Reprenons le polynôme de l'exemple 2 du début : $p(z_1, z_2) = z_1 + z_2 - 1$.

Son polytope de Newton est donné par le triangle $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$. On en déduit alors facilement les cônes duals de chaque sommet du polytope :

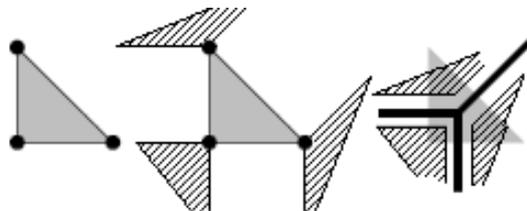


Fig. 12. Polytope de Newton de p , cônes duals, de récession

Ces cônes duals représentent en fait des cônes de récession pour chacune des composantes connexes non bornées du complémentaire. Rappelons la définition d'un cône de récession :

Définition 9. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble convexe. Le cône de récession de E est défini par :

$$C^r = \{y \in \mathbb{R}^n; x + ty \in E \forall x \in E, t \geq 0\}$$

Exemple 7. $f(z, w) = 1 + z + w \in (\mathbb{C}^n)^*$ et $\text{Log}(Z_f) = A_f$.

Le complémentaire de A_f a 3 composantes disjointes.

A ces 3 composantes correspondent 3 différentes séries de Laurent de $1/f$. Elles sont les domaines naturels de convergence logarithmique pour ces séries et contiennent le cône de récession attaché à un sommet du polytope de Newton de f .

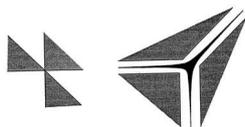


Fig. 13. Composantes connexes du complémentaire de A_f

Soit $f(z) = \sum_{\alpha \in A} c_\alpha z^\alpha$ où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ et $c_\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{c_\beta z^\beta} \frac{1}{1 + \sum_{\alpha \in A'} \frac{c_\alpha}{c_\beta} z^{\alpha-\beta}} = \frac{1}{c_\beta z^\beta} \sum_{j=0}^{\infty} \left(- \sum_{\alpha \in A'} \frac{c_\alpha}{c_\beta} z^{\alpha-\beta} \right)^j$$

où $A' = A \setminus \{\beta\}$.

Il reste à voir si la série converge bien.

Si une fonction est holomorphe dans le domaine

$$\{z \in \mathbb{C}^n / (|z_1|, \dots, |z_n|) \in E\}$$

où E est un sous-ensemble ouvert connexe de \mathbb{R}_+^n , elle peut être représentée par une série de Laurent convergente $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} a_\alpha z^\alpha$. On considère alors en fait le domaine comme $\text{Log}^{-1}(E) = \{z \in (\mathbb{C}^*)^n / \text{Log}(z) \in E\}$. Alors $1/f$ sera holomorphe sur chacune des composantes du complémentaire de l'amibe.

On associe à une composante non bornée du complémentaire correspondant à un sommet β du polytope de Newton le développement en série de Laurent de $1/f$ obtenu en mettant en facteur le monôme z^β dans f .

Le développement converge alors dans le domaine $\text{Log}^{-1}(E)$ correspondant à ce sommet.

Il peut y avoir bien entendu des composantes du complémentaire de l'amibe ne contenant pas de cône de récession attaché à un sommet du polytope de Newton (cas des composantes bornées par exemple) mais chaque cône dual attaché à un sommet du polytope de Newton renvoie à une composante non bornée du complémentaire.

Proposition 3. Les sommets du polytope de Newton de p sont en bijection avec ces composantes connexes de $\mathcal{C}A(Z_p)$ qui contiennent un cône de récession.

Définition 10. Un polynôme de Laurent f est dit optimal si le complémentaire de son amibe a le même nombre de composantes que le nombre de points entiers dans le polytope de Newton associé.

On a donc établi un lien entre le polytope de Newton d'un polynôme et l'amibe pour ce polynôme.

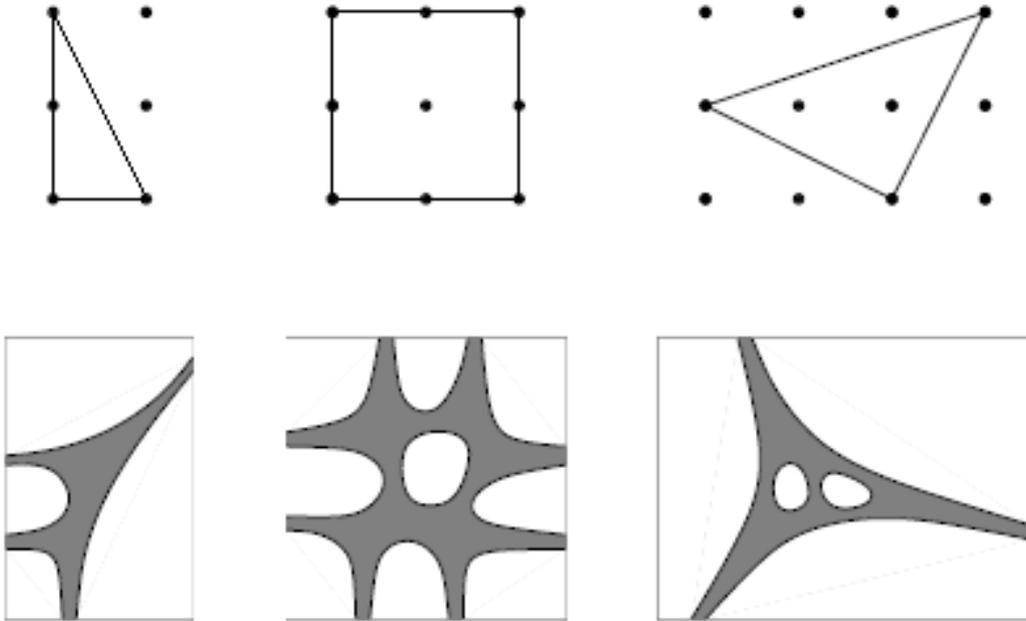


Fig. 14. Amibes et leur polytope de Newton

Proposition 4. *A chaque composante connexe du complémentaire de $A(V)$ dans \mathbb{R}^n , on peut associer, de façon naturelle, un point entier de Δ .*

Preuve. Il existe en fait une fonction localement constante $\text{ind} : \mathcal{C}A(V) \rightarrow \Delta \cap \mathbb{Z}^n$ qui envoie des composantes connexes différentes du complémentaire de $A(V)$ sur des points entiers de Δ . Ceci est lié à l'ordre des composantes du complémentaire. On a la connection :

Sur chaque composante de $\mathcal{C}A(Z_f)$, la fonction de Ronkin N_f se comporte comme la fonction de Ronkin d'un monôme : elle y est linéaire et son gradient est le point entier correspondant au polytope de Newton.

Nous allons voir tout cela en étudiant notamment l'ordre des composantes du complémentaire et la fonction de Ronkin.

1.4. Ordre des composantes du complémentaire

Un puissant outil analytique pour l'étude des amibes et de leur complémentaire est la **fonction de Ronkin**².

Le concept d'ordre d'une composante du complémentaire joue un rôle important dans l'étude des amibes.

²L.I. Ronkin : [LIR]

Définition 11. Pour un polynôme $f \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$, la fonction de Ronkin $N_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie pour tout $w \in \mathfrak{CA}(Z_f)$ par

$$N_f(w_1, \dots, w_n) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(w)} \log |f(z_1, \dots, z_n)| \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n}.$$

$\text{Log}^{-1}(w)$ est un tore de dimension (réelle) n que l'on décrit par

$$\left\{ (e^{w_1} e^{i\theta_1}, \dots, e^{w_n} e^{i\theta_n}); \theta_1, \dots, \theta_n \in \frac{\mathbb{R}}{(2\pi\mathbb{Z})} \right\}$$

L'intégration d'une n -forme dessus a donc un sens.

Exemple 8. Soit $n = 2$ et $f(z_1, z_2) = cz_1^s z_2^t$ avec $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} N_f(w_1, w_2) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\text{Log}^{-1}(w_1, w_2)} \frac{\log|c|}{z_1 z_2} + \frac{s \cdot \log|z_1|}{z_1 z_2} + \frac{t \cdot \log|z_2|}{z_1 z_2} dz_1 dz_2 \\ &= \log|c| + s \cdot w_1 + t \cdot w_2 \end{aligned}$$

$$\text{car } \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\text{Log}^{-1}(w_1, w_2)} \frac{s \cdot \log|z_1|}{z_1 z_2} dz_1 dz_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s \cdot (\log(e^{w_1}) + \log|e^{it}|) dt = s \cdot w_1$$

Théorème 3.

i) La fonction de Ronkin N_f est convexe.

ii) N_f est affine sur chaque composante de $\mathfrak{CA}(Z_f)$.

iii) La dérivée par rapport à w_j de N_f est constante dans chaque composante connexe C du complémentaire de l'amibe et c'est de plus un entier $\nu_j \in \mathbb{Z}$ qui vaut

$$\nu_j = \text{Re} \left[\frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\text{Log}^{-1}(w)} z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n} \right].$$

Définissons alors l'ordre d'une composante du complémentaire d'une amibe qui établit une connection entre les composantes et le polytope de Newton.

Définition 12. Pour x dans une composante connexe C de \mathfrak{CA}_f , le vecteur $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ est appelé ordre de la composante C .

Remarque 4. L'ordre (ν_1, \dots, ν_n) de la composante connexe du complémentaire de l'amibe de f correspondant à un sommet β du polytope de Newton de f est le point β lui-même.

Plus généralement,

Proposition 5. L'ordre ν de toute composante de $\mathfrak{CA}(Z_f)$ est contenu dans le polytope de Newton de f , c'est à dire qu'il est toujours l'un des points à coordonnées entières de son polytope de Newton.

Par cela, on obtient alors un encadrement du nombre de composantes du complémentaire d'une amibe.

Proposition 6. *Le nombre m_c de composantes connexes du complémentaire de l'amibe est minoré par le nombre n_v de sommets du polytope de Newton Δ de f et majoré par le nombre de points à coordonnées entières (on dit aussi nombre de points entiers) appartenant au polytope de Newton $\Delta(f)$.*

La borne supérieure provient de l'injectivité de l'application qui à une composante associe son ordre, la borne inférieure du fait que l'ordre d'une composante attachée à un sommet vaut précisément ce sommet.

Proposition 7. *M. Mkrtchian et A. Yuzhakov.*³

La borne supérieure pour le nombre de composantes connexes de $\mathcal{C}A(V)$ formulée dans la proposition ci-dessus est atteinte : pour tout polytope convexe Δ à sommets entiers dans \mathbb{R}^n , il existe une hypersurface $V \subset (\mathbb{C}^)^n$ de polytope de Newton Δ telle que le nombre de composantes connexes de $\mathcal{C}A(V)$ soit égal au nombre de points entiers de Δ .*

Et la majoration donne ce corollaire :

Corollaire 1. *$\mathcal{C}A(Z_f)$ a un nombre fini de composantes connexes.*

Voyons maintenant une application des amibes : l'amibe d'un discriminant qui possède une propriété remarquable.

1.5. Amibe d'un discriminant

Définition 13. *Soit $p = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_0$ un polynôme avec $p > 1$. Le **discriminant** de p est la quantité $\text{disc}(P) = (-1)^{p(p-1)/2} a_p^{-1} \text{Res}(P, P')$.*

Exemple 9. *Le discriminant du polynôme $p(y) = y^3 + x_1 y^2 + x_2 - 1$ est donné par :*

$$x_1^2 x_2^2 + 4x_1^3 - 4x_2^3 - 18x_1 x_2 - 27$$

Le polytope de Newton de ce discriminant et son amibe sont :

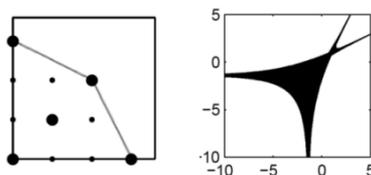


Fig. 15. Polytope de Newton et amibe de notre discriminant

Théorème 4. *M. Passare, A. Tsikh.*⁴

L'amibe d'un discriminant est toujours solide.

Entrons maintenant dans la partie consacrée à la géométrie tropicale qui relie les amibes à une "nouvelle géométrie" assez remarquable.

³Référence [PR99]

⁴Référence [PTA]

2. Géométrie Tropicale

La géométrie tropicale est plutôt un nouveau domaine de la géométrie algébrique. L'idée principale est de remplacer les variétés algébriques habituelles par certains objets linéaires par morceaux dans \mathbb{R}^n , ce qui peut être fait en considérant de nouvelles opérations combinatoires. La géométrie tropicale apporte d'abord de nouvelles idées et de nouveaux concepts qui pourraient être utiles pour répondre à des problèmes énumératifs et permet d'envisager des allers-retours entre le monde de la géométrie algébrique complexe et le monde de la géométrie algébrique réelle.

Dans cette partie, nous commencerons par donner une brève présentation de géométrie tropicale basée sur un semi-anneau particulier puis nous verrons les nouvelles propriétés géométriques remarquables qui en découlent.

2.1. Arithmétique tropicale

Considérons \mathbb{R} avec les opérations suivantes \oplus, \odot :

$$x \oplus y = \max\{x, y\}, x \odot y = x + y.$$

Définition 14. *Le semi-anneau $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ est appelé semi-anneau **tropical**⁵.*

Remarque 5. *On pourrait utiliser min au lieu de max dans la définition de l'opération \oplus mais utiliser max est plus commode pour la dualité avec le polygone de Newton (que nous verrons plus tard).*

Exemple 10.

$$3 \oplus 7 = 7$$

$$3 \odot 7 = 10.$$

Voici les tables d'opération du semi-anneau tropical :

\oplus	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	\odot	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	2	3	4	5	6	7	8	9	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	3	3	3	4	5	6	7	8	9	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	4	4	4	4	5	6	7	8	9	4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	5	5	5	5	5	6	7	8	9	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	6	6	6	6	6	6	7	8	9	6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	7	7	7	7	7	7	7	8	9	7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tables des opérations tropicales

⁵Cet adjectif a été instauré par les mathématiciens français en l'honneur de leur collègue brésilien Imre Simon qui est l'un des pionniers de l'algèbre "min-plus". L'adjectif "Tropical" vient simplement de la perception exotique des français du Brésil.

On vérifie facilement les propriétés usuelles de commutativité, d'associativité et de distributivité :

- L'addition et la multiplication sont commutatifs : $x \oplus y = y \oplus x$ et $x \odot y = y \odot x$.

- La multiplication tropicale est distributive par rapport à l'addition tropicale :

$$x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z.$$

- Moins l'infini est l'élément neutre pour l'addition et zéro est l'élément neutre pour la multiplication :

$$x \oplus (-\infty) = x \text{ et } x \odot 0 = x.$$

La soustraction en arithmétique tropicale n'est pas toujours possible. En effet, il n'y a pas de x que l'on peut appeler "3 moins 10" car l'équation $10 \oplus x = 3$ n'a pas de solution.

Proposition 8. *L'addition est idempotente dans le sens où $a \oplus a = a$.*

Proposition 9. $(x \oplus y)^n = x^n \oplus y^n$.

2.2. Polynômes tropicaux

Un *polynôme tropical* à n variables est de la forme

$$F(x) = \bigoplus_{k \in I} a_k \odot x^k$$

où $x_i^{k_i}$ est établi comme $x_i \odot \dots \odot x_i$ k_i fois.

En appliquant les définitions des opérations, on a en fait :

$$F(x) = \max_{k \in I} (a_k + \langle k, x \rangle).$$

(" $\langle k, x \rangle$ " est le produit scalaire). C'est une fonction convexe de \mathbb{R}^n .

Exemple 11. *Exemple de monômes :*

$$x^2 = x \odot x = x + x = 2x$$

$$x^3 = x \odot x \odot x = x + x + x = 3x$$

$$x^p = px$$

Proposition 10. *Les monômes d'un polynôme tropical sont des fonctions linéaires à coefficients entiers.*

Exemple 12. *Considérons le polynôme tropical à une variable de degré 3*

$$f(x) = a \odot x^3 \oplus b \odot x^2 \oplus c \odot x \oplus d.$$

Tropicalement, $f(x) = \max(a + 3x, b + 2x, c + x, d)$. Donc pour tracer cette fonction tropicale, on dessine 4 droites dans le plan (x, y) : $y = 3x + a$, $y = 2x + b$, $y = c + x$ et la ligne horizontale $y = d$.

La valeur de $f(x)$ est la plus grande valeur de y telle que (x, y) est sur l'une des 4 droites, c'est à dire $f(x)$ est l'enveloppe supérieure des lignes.

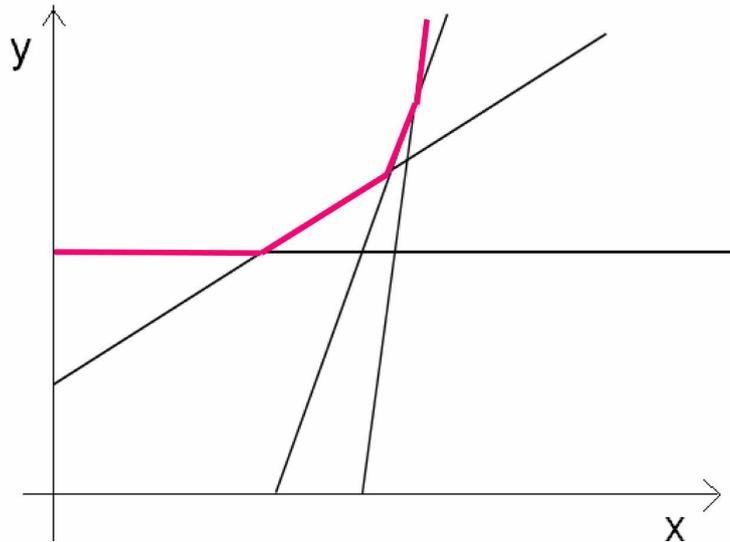


Fig. 16. Polynôme tropicale

Remarque 6. Par définition des opérations tropicales, un polynôme tropical $F(x)$ est le maximum des fonctions affines $\langle k, x \rangle + a_k$ ($k \in I$) où "+" désigne l'addition habituelle. Donc F est une fonction convexe affine par morceaux qui est la transformée de Legendre de la fonction $\nu : k \rightarrow -a_k$.

2.3. Variétés tropicales

Définition 15. Soit $p : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ un polynôme tropical. On définit l'hypersurface $T(P)$ associée à p comme l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ tel que le maximum $f(x)$ soit atteint au moins deux fois. De manière équivalente, $x \in T(P)$ équivaut à p n'est pas linéaire en x .

Définition 16. Dans le plan tropical, les hypersurfaces sont appelées **courbes tropicales**.

Exemple 13. Notre premier exemple est une droite du plan. Elle est définie par un polynôme : $p(x, y) = a \odot x \oplus b \odot y \oplus c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. La courbe $T(P)$ est l'ensemble des points (x, y) où la fonction :

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \longmapsto \max(a + x, b + y, c).$$

est non linéaire. Cela représente trois demi-rayons émanant du point $(x, y) = (c - a, c - b)$. En effet, on a trois possibilités de maximum atteint par au moins deux monômes : $T(p) = \{(x, y) \mid a + x = b + y \geq c, \text{ ou } b + y = c \geq a + x, \text{ ou } a + x = c \geq b + y\}$.

Exemple 14. Conique tropicale :

$p(x, y) = x^2 \oplus y^2 \oplus 2xy \oplus 4$ (le produit est tropical). La courbe $T(p)$ est l'ensemble des points (x, y) où la fonction :

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \longmapsto \max(2x, 2y, 2 + x + y, 4).$$

est non linéaire. On regarde les possibilités de maximum atteint par au moins 2 monômes pour obtenir la courbe de la conique tropicale :

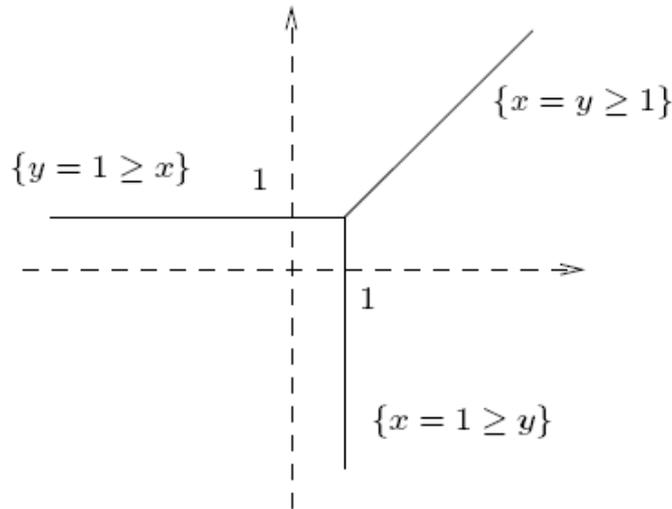


Fig. 17. Droite tropicale

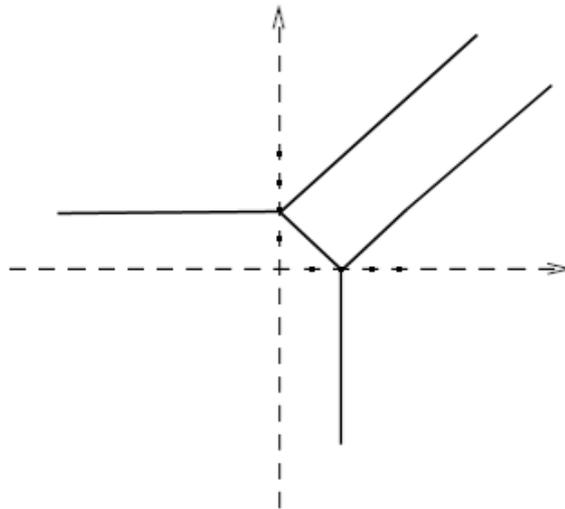


Fig. 18. Conique tropicale

De manière générale, une conique tropicale sera de la forme :

$$a \odot x^2 \oplus b \odot x \odot y \oplus c \odot y^2 \oplus d \odot x \oplus e \odot y \oplus f.$$

On peut alors s’amuser à établir une classification des coniques tropicales suivant certaines conditions sur les coefficients a,b,c,d,e et f.

Exemple 15. *Cubique tropicale :*

$p(x, y) = x^3y \oplus x^2y^2 \oplus xy^2 \oplus 100x^2y \oplus 1000xy \oplus 1$ (le produit est tropical). La courbe $T(p)$ est l’ensemble des points (x, y) où la fonction :

$$p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \longmapsto \max(3x + y, 2x + 2y, x + 2y, 100 + 2x + y, 100 + x + y, 1).$$

est non linéaire. On regarde les possibilités de maximum atteint par au moins 2 monômes pour obtenir la courbe de la cubique tropicale :

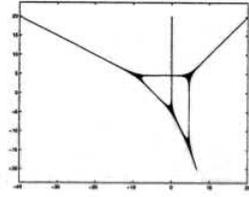


Fig. 19. Cubique tropicale

Remarque 7. *En regardant le graphe de l'amibe $A(V)$ de l'exemple 2, on voit à l'intérieur une ligne tropicale qui représente les trois directions asymptotiques des branches de de l'amibe. Cette variété tropicale est appelé **squelette de l'amibe**.*

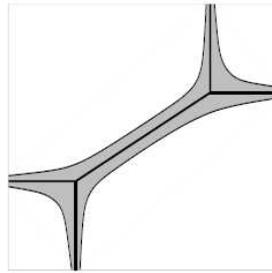


Fig. 20. Une amibe et son squelette

Théorème 5. Théorème de Kapranov. *Si A est l'amibe obtenue par le polynôme p alors son squelette coïncide avec la courbe tropicale associée au polynôme tropicalisé $\text{trop}(f)$.*

Remarque 8. *Plusieurs polynômes tropicaux peuvent définir la même courbe tropicale.*

Intéressons-nous maintenant à la relation entre courbes tropicales et polytope de Newton.

2.4. Courbes tropicales et polytopes de Newton

Le graphe tropical du polynôme est obtenu en considérant les directions normales aux côtés du polytope de Newton.

On a donc établi un lien entre le polytope de Newton d'un polynôme, son tracé tropical et l'amibe pour ce polynôme.

Ceci permet notamment de créer un algorithme d'analyse et de construction de courbes tropicales en étudiant les polytopes de Newton associés, plus précisément chaque segment du polytope.

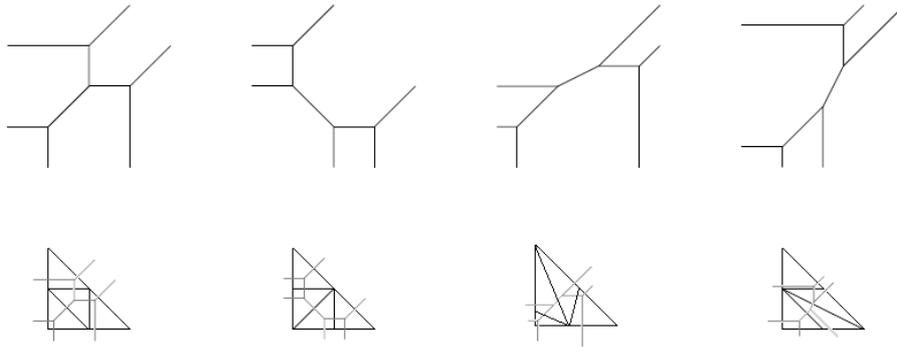


Fig. 21. Polytopes de Newton et courbes tropicales associées (squelettes des amibes)

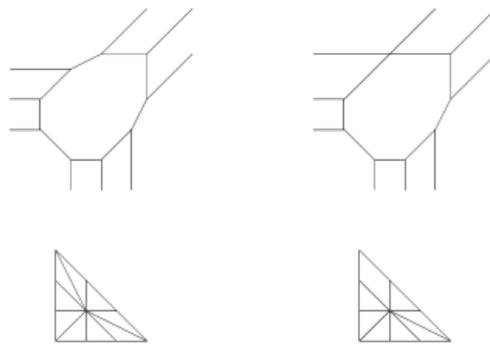


Fig. 22. Polytopes de Newton et cubiques tropicales associées

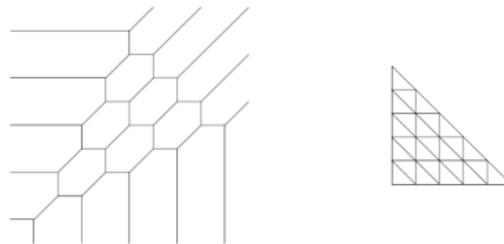


Fig. 23. Graphe tropical en alvéoles et son polytope de Newton

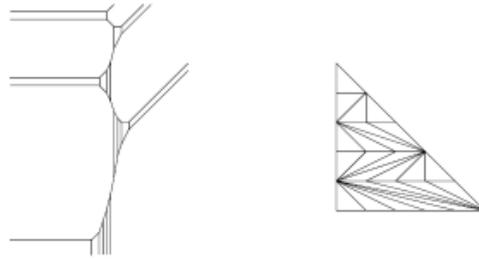


Fig. 24. Graphe tropical de Itenberg-Viro

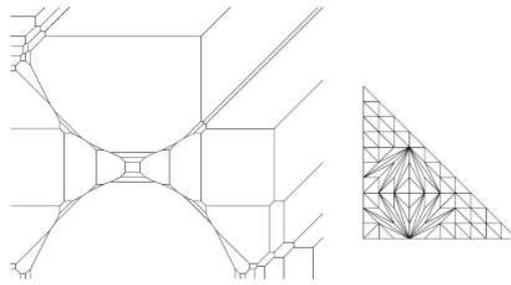


Fig. 25. Graphe tropical de Itenberg-Ragsdale (de degré 10)

2.5. Version tropicale des théorèmes classiques

Intéressons nous aux problèmes d'intersection. On sait qu'en géométrie classique, deux droites non parallèles et non confondues se coupent en un point, que deux coniques distinctes se coupent en exactement deux points...

Que deviennent ces propriétés en géométrie tropicale ?

Intéressons-nous d'abord à quelques définitions qui nous seront utiles.

Définition 17. Une courbe tropicale est dite plane et projective de degré m (où m est un entier strictement positif) si elle a le triangle à sommets $(0,0)$, $(m,0)$ et $(0,m)$ dans \mathbb{R}^2 pour polygone de Newton.

Exemple 16. Une droite tropicale est plane, projective, de degré 1.

On a la propriété classique suivante que l'on retrouve en géométrie tropicale. :

Proposition 11. Il existe une droite tropicale passant par deux points donnés.

Faisons quelques observations sur les intersections de courbes tropicales.

Commençons par un cas particulier.

On peut obtenir comme intersection de deux droites tropicales, une infinité de points. Cela se passe quand les deux équations des droites tropicales ont un facteur commun non constant.

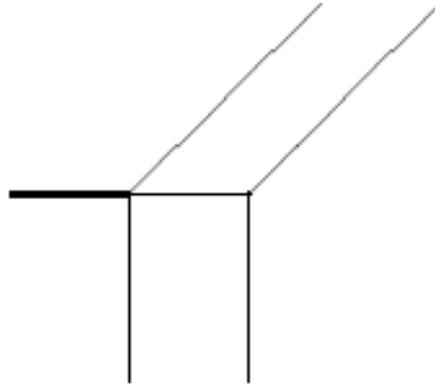


Fig. 26. Intersection infinie de deux droites tropicales

Prenons ensuite ces deux coniques tropicales (qui sont de degré 2). Elles se coupent en 4 points.

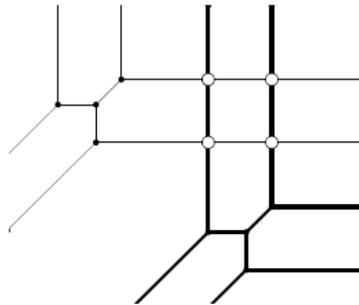


Fig. 27. Intersection de deux coniques tropicales

L'intersection (comptée avec les multiplicités) d'une droite tropicale (qui est de degré 1) et d'une conique tropicale (qui est de degré 2) semble présenter systématiquement $2 = \text{deg}(\text{droite tropicale}) \times \text{deg}(\text{conique tropicale})$ points d'intersection.

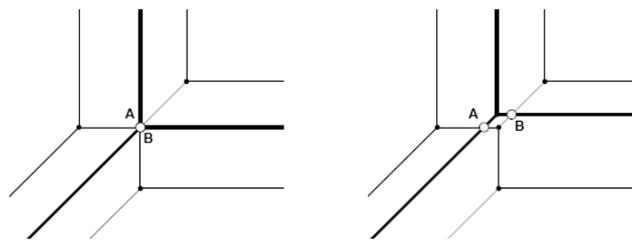


Fig. 28. Intersection d'une droite et d'une conique tropicales

Enfin, pour l'intersection de cubiques génériques tropicales, on observe 9 points d'intersection qui correspond au produit des degrés des cubiques ($= 3$).

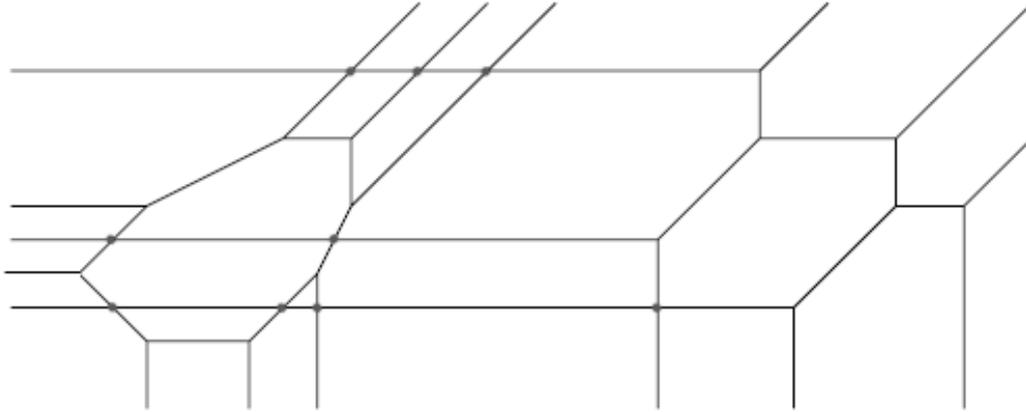


Fig. 29. Intersection de deux cubiques tropicales

On peut généraliser tous ces résultats. En fait, les courbes tropicales se comportent comme les courbes algébriques au niveau des intersections. On retrouve ainsi le théorème de Bézout :

Théorème 6. Théorème de Bézout. Soit C une courbe $p(x, y) = 0$ de degré m et D une courbe $q(x, y) = 0$ de degré n , définies par des polynômes à coefficients complexes. Supposons que $p(x, y)$ et $q(x, y)$ n'ont pas de facteurs non constants communs. Alors, en comptant avec les multiplicités, C et D ont au plus $m.n$ intersections dans \mathbb{C}^2 .

Si les coefficients des polynômes sont génériques, C et D ont exactement $m.n$ intersections.

Exemple 17. Cas $m = 1$:

$p(x, y) = \alpha.x + \beta.y + \gamma = 0$ avec $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$. En supposant $\beta \neq 0$,

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}.x - \frac{\gamma}{\beta}$$

Intersection : $q(x, -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta}) = 0$ de degré au plus n en x car le degré de q est n . Donc q a au plus n racines. Donc le nombre d'intersections est au plus $n = n * 1$.

Généralisation :

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

avec F_1 de degré m_1 , ..., F_n de degré m_n . Il y a alors au plus $m_1 \dots m_n$ solutions dans \mathbb{C}^n .

On peut en fait une meilleure majoration en utilisant les polytopes de Newton (qui sont naturellement convexes).

Introduisons pour cela la somme de Minkowski de deux polytopes convexes.

Définition 18. Une opération naturelle sur l'ensemble des polytopes convexes d'un espace vectoriel V de dimension finie d est l'*addition de Minkowski* :

étant donnés deux polytopes convexes Δ_1 et Δ_2 , on définit le polytope convexe $\Delta_1 + \Delta_2$ par :

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \{\xi + \xi' ; \xi \in \Delta_1, \xi' \in \Delta_2\}.$$

Il s'agit là d'une opération interne associative.

Exemple 18. $p(x, y) = x^2 - 4xy + 2y^2 - 3x$ (conique)

$q(x, y) = x^3 - 5yx^2 + 40x - y^2 + 4y - 1/2$ (cubique)

Leurs polytopes de Newton et leur somme de Minkowski sont les suivants :

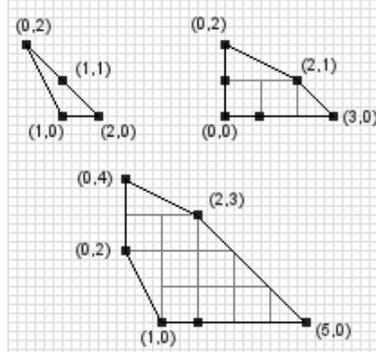


Fig. 30. Somme de Minkowski de deux polytopes de Newton

Si \mathcal{P}_n désigne l'ensemble des polytopes convexes de V , on définit un opérateur \mathcal{M} sur $\mathcal{P}_n \times \dots \times \mathcal{P}_n$ en "polarisant" (relativement à cette opération d'addition) la forme dont l'action est définie sur \mathcal{P}_n par :

$$\Delta \mapsto n! \text{Vol}_n(\Delta)$$

à valeurs dans \mathbb{N} .

Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 19. L'opérateur « prise de volume mixte » est l'opérateur n -linéaire (relativement à l'addition interne de Minkowski) défini sur $\mathcal{P}_n \times \dots \times \mathcal{P}_n$ par

$$\mathcal{M}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) = (-1)^n \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#I} \text{Vol}_n \left(\sum_{k \in I} \Delta_k \right)$$

c'est à dire l'opérateur obtenu en polarisant (relativement à l'opération d'addition de Minkowski) la forme volume normalisée définie précédemment.

Exemple 19. Le volume mixte de deux polytopes convexes Δ_1 et Δ_2 du plan affine \mathbb{R}^2 s'exprime donc via la formule :

$$\mathcal{M}(\Delta_1, \Delta_2) = \text{aire}(\Delta_1 + \Delta_2) - \text{aire}(\Delta_1) - \text{aire}(\Delta_2)$$

Exemple 20. Pour les polynômes p et q de l'exemple 18, le simplexe $\{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ ayant comme aire $1/2! = 1/2$, on a, en notant P et Q leur polytope de Newton :

$\text{Vol}(P) = 1$, $\text{Vol}(Q) = 7/2$ et $\text{Vol}(P + Q) = 21/2$.

On utilise maintenant la formule trouvée dans l'exemple précédent :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(P, Q) &= \text{Vol}(P + Q) - \text{Vol}(P) - \text{Vol}(Q) \\ &= 21/2 - 1 - 7/2 \\ &= 12/2 = 6 \end{aligned}$$

Rappelons enfin que le système d'équations $p = q = 0$ a 6 solutions.

On peut maintenant énoncer le théorème de Bernstein qui fournit une borne plus fine pour le nombre de solutions (nombre de points d'intersection) avec le volume mixte de Minkowski.

Théorème 7. Théorème de Bernstein. *Le nombre de solutions de $p_1 = \dots = p_n$ dans $(\mathbb{C}^*)^n$ avec P_i polytope de Newton de p_i est, en comptant avec les multiplicités, majorée par le volume mixte de P_1, \dots, P_n : $\mathcal{M}(P_1, \dots, P_n)$.*

De plus, pour des choix génériques de coefficients pour les p_i , le nombre de solutions est exactement $\mathcal{M}(P_1, \dots, P_n)$.

Si l'on regarde l'intersection de deux courbes tropicales de degrés donnés, on a donc les analogues tropicaux de ces théorèmes.

Remarque 9. *Si C et D sont deux courbes tropicales planes projectives de degrés respectifs m et n alors en appliquant le théorème de Bernstein, on retrouve le théorème de Bézout :*

En notant P et Q les polytopes de Newton de C et D (qui sont des triangles rectangles isocèle), on a

$$\mathcal{M}(P, Q) = \frac{(m+n)^2}{2} - \frac{m^2}{2} - \frac{n^2}{2} = mn$$

Remarque 10. *L'intérêt de la version tropicale des théorèmes de Bernstein et Bézout est la simplicité de leurs démonstrations par rapport à celles en géométrie classique. Il reste maintenant à voir si les versions tropicales permettent d'établir plus facilement les versions classiques.*

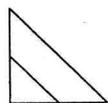
Remarque 11. *Ces théorèmes tropicaux ont des applications comme en chimie pour trouver par exemple l'angle entre deux liaisons d'atomes dans une molécule.*

3. Conclusion

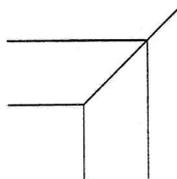
La théorie des amibes est un récent et beau domaine de recherche encore très accessible, où les possibilités de découvertes sont réelles. Les récents résultats sur les amibes ont été obtenus très rapidement durant ces 8 dernières années et le champ de découverte est encore grand ouvert. Le principal intérêt de la géométrie tropicale est la substitution des problèmes algébro-géométriques par des problèmes combinatoires qui amènent souvent à des preuves plus simples et même occasionnellement à des résultats en géométrie algébrique.

La géométrie tropicale n'en est encore qu'à ses débuts, les objets basiques de la géométrie algébrique n'ayant pas encore d'homologues satisfaisants dans le monde tropical. Il y a donc par conséquent un nombre important de problèmes ouverts en géométrie tropicale, et on peut raisonnablement s'attendre à ce que les solutions de ces problèmes donnent une nouvelle stratégie d'attaque pour de nombreux problèmes en géométrie algébrique.

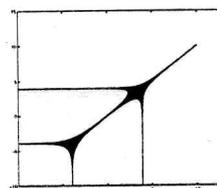
Annexe 1



Triangulation

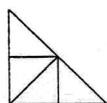


Graphe dual

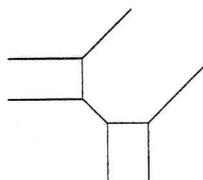


Amibe

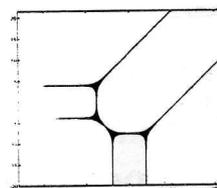
$$p(z, w) = 1 + 50z + z^2 + 50w + 0 \cdot zw + w^2.$$



Triangulation

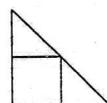


Graphe dual

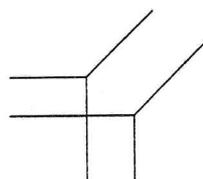


Amibe

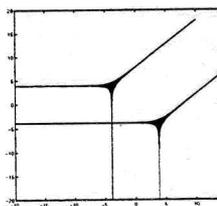
$$p(z, w) = 1 + 50z + z^2 + 50w + 10^5 zw + w^2.$$



Triangulation

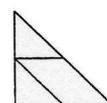


Graphe dual

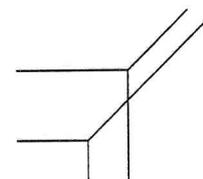


Amibe

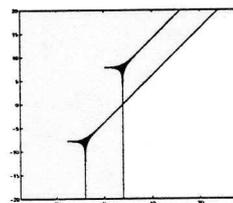
$$p(z, w) = 1 + 50z + z^2 + 50w + 2500zw + w^2.$$



Triangulation



Graphe dual



Amibe

$$p(z, w) = 1 + 50z + z^2 + 2500w + 50zw + w^2.$$

Annexe 2

Bibliographie

- [KTH] Mikael Forsberg. *Amoebas and Laurent Series*. Doctoral Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1998.
- [FPT] Mikael Forsberg, Mikael Passare, and August Tsikh. *Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas*. Institutionen för matematik, Sweden, 2000.
- [IT03] Ilia Itenberg. *Amibes de variétés algébriques et dénombrement de courbes*. Séminaire Bourbaki, Paris, 2003.
- [GKZ] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky. *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*. Math. Theory Appl., Birkhäuser, Boston, 1994.
- [AAG] Thorsten Theobald. *Applicable Algebraic Geometry*. IMA Summer Program, Frankfurt, 2007.
- [LIR] L.I. Ronkin, On zeros of almost periodic functions generated by functions holomorphic in a multicircular domain, *Complex analysis in modern mathematics*, 239–251, FAZIS, Moscow, 2001.
- [PR99] M. Passare, H. Rullgard, Multiple Laurent series and polynomial amoebas. Actes des Rencontres d'Analyse Complexe (Poitiers-Futuroscope, 1999), 123–129, Atlantique, Poitiers, 2002.
- [PTA] M. Passare, A. Tsikh, Amoebas : their spines and their contours. Idempotent mathematics and mathematical physics, 275–288, Contemp. Math., 377, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [TGM] G. Mikhalkin. *Tropical geometry*, 2000.
- [NHA] A. Laudal *Legacy of Niels Henrik Abel : The Abel Bicentennial*. Springer, Oslo, 2002.